

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-2023
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 ΛΕΠΤΑ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΑΣ (1) ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
5. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

A1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x}{x + 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 5x}{3x^2 - 4}$

A2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις.

α)	Ισχύει ότι $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β)	Η εξίσωση $\eta\mu x = -1$ έχει λύσεις $x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ)	Αν $f(x) = x - x$, με $x > 0$ τότε $f(x) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ)	$\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x \eta\mu 3x = \eta\mu 8x$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

A3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > -3 \\ x^2 + 2x - 5, & x \leq -3 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.

A4. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 16} \quad (3 \text{ μον.})$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g με τύπο:

$$g(x) = \frac{x-4}{x+2}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (7 \text{ μον.})$$

A5. α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x$ (3 μον.)

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) ή με οποιονδήποτε

άλλον τρόπο να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ (7 μον.)

A6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}{\sqrt{x - 4}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x - 2} \quad \text{αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν οι πιο πάνω}$$

συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

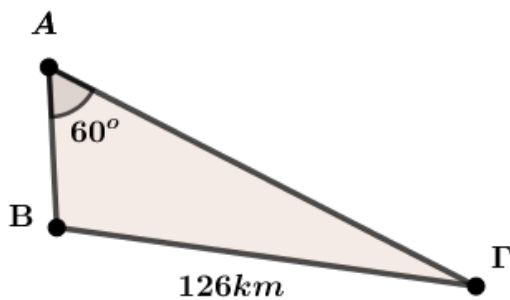
ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Β1. Δύο ελικόπτερα απογειώνονται από το σημείο A , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το πρώτο διανύει την απόσταση AB ενώ το δεύτερο διανύει την απόσταση AG . Δίνεται ότι η απόσταση AG είναι τριπλάσια της απόστασης AB . Αν, επιπλέον, η γωνία μεταξύ των δύο πτήσεων είναι 60° και η απόσταση $BG = 126 \text{ km}$, τότε:

α) Να δείξετε ότι η απόσταση $AG = 54\sqrt{7} \text{ km}$ (7 μον.)

β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής όπως καθορίζεται από το τρίγωνο ABG (3 μον.)



Β2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

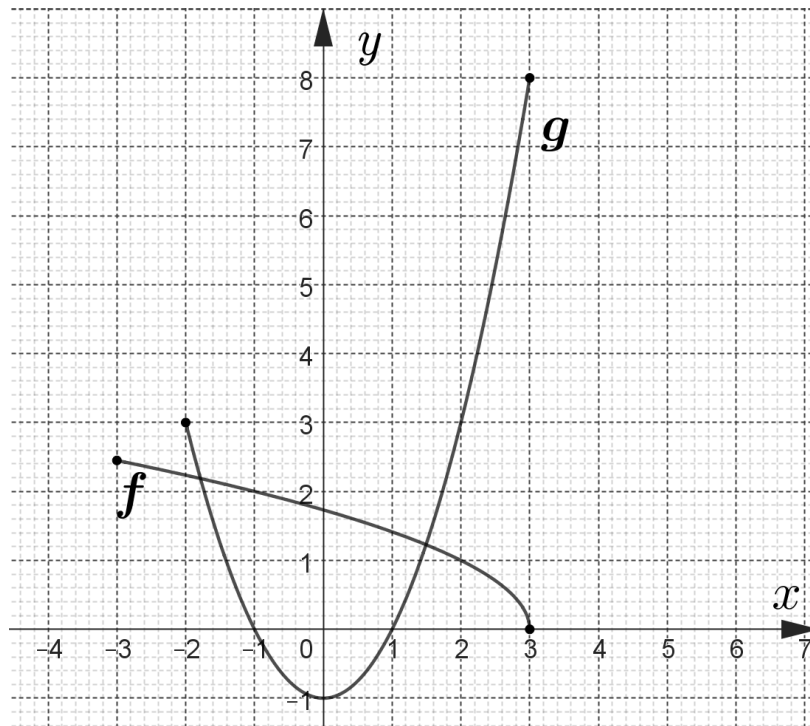
$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 6x - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 5x + \eta\mu 3x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή κανένα από τα δύο.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x}$

B3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . (1 μον.)
- β) Με τη χρήση των γραφικών παραστάσεων των f και g , να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. (2 μον.)
- $(f + g)(2)$
 - $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$
 - $g(f(-1))$
 - $f^{-1}(g(1))$
- γ) Αν οι τύποι των συναρτήσεων f και g , όπως δίνονται στην πιο πάνω γραφική παράσταση, είναι $f(x) = \sqrt{3-x}$ και $g(x) = x^2 - 1$, αντίστοιχα, να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $g \circ f$. (7 μον.)
- δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται δικαιολογώντας την απάντησή σας. Στην περίπτωση που η f αντιστρέφεται, να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} . (5 μον.)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A + B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A - B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A - B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B - A}{2} \eta\mu \frac{A + B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$